Leçon n°:1 : Continuité d'une fonction numérique.

Notation : $(I \subset \mathbb{R})$; I intervalle de $\mathbb{R}$

f et g deux fonctions numériques, f définie sur I.

I - Continuité : en un point / sur un intervalle.

Déf 1 : Soit $x_0 \in I$;

$(f \text{ continue en } x_0) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

EXEMPLE : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $x_0 = -1$

on a : $f(-1) = 3 - 4(-1) + 1 = 8$ et $\lim_{x \to -1} f(x) = 8 = f(-1)$

donc f est continue en $x_0 = -1$.

Déf 2 :
$(f \text{ continue à gauche en } x_0) \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$

$(f \text{ continue à droite en } x_0) \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$

EXEMPLE
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x} \text{ ; (si } x \neq 0) \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

- si $x < 0$ alors $|x| = -x$ donc $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$

donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-1) = -1 = f(0)$

donc f est continue à gauche en 0

- si $x > 0$ alors $|x| = x$ donc $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ et on a :

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 = 1 \neq f(0)$; donc f n'est pas continue à droite en 0.

Prop 1 :
$(f \text{ continue en } x_0) \iff f$ continue à gauche et à droite en x_0

c-à-d : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$.

EXEMPLE : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$ f n'est pas continue en 0

Car : f non continue à droite en 0

Prop 2 : (f continue sur I) $\Leftrightarrow$ (f continue en tout point $x_0 \in I$)

f continue sur $[a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ continue sur }]a,b[\\ f \text{ continue à droit en } a \\ f \text{ continue à gauche en } b \end{cases}$

II. Continuitée des fonctions usuelles et opérations.

on note un polynome : $P(x)$; $Q(x)$ ...

Prop :1 :

- un polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- une fonction rationnelle f ($f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$) est continue sur D_f
- La fonction irrationnelle $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

EXEMPLE : • $P(x) = 4x^8 - 3x^5 + 4x + 1$

P est continue sur $\mathbb{R}$ car : polynôme

• $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 1}{(x-1)x}$

f est une fonction rationnell. $D_f = \mathbb{R} - \{1;0\}$

f est continue sur $D_f = \mathbb{R}^* - \{1\}$.

Prop 2 : supposons que f et g continues sur I. Soit $k \in \mathbb{R}$.

• Les fonctions : $(f+g)$; $(k \times f)$ et $(f \times g)$ sont continue sur I

EXEMPLE : $f(x) = \sqrt{x} + 6x^2 + 3x - 2$

on a : $\begin{cases} x \mapsto \sqrt{x} \text{ continue sur } \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto 6x^2 + 3x - 2 \text{ continue sur } \mathbb{R}^+ \text{ (car continue sur } \mathbb{R}) \end{cases}$

donc $x \mapsto f(x) = \sqrt{x} + (6x^2 + 3x - 2)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Prop 3 : Si $\begin{cases} f \text{ continue en } x_0 \\ g \text{ continue en } f(x_0) \end{cases}$

alors : $g \circ f$ est continue en x_0.

II. Image d'un intervalle par une fct continue et strictement monotone.

1er cas f continue est strictement ↗ (croissante)

$f([a;b]) = [f(a); f(b)]$

$f(]a;b]) =]\lim\limits_{x \to a^>} f(x) ; f(b)]$

$f(]a; +\infty[) =]\lim\limits_{x \to a^>} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$

$f(]-\infty; a]) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; f(a)]$

2ème cas ; f continue est strictement ↘ (décroissante)

$f([a;b]) = [f(b); f(a)]$

$f(]a;b]) = [f(b); \lim\limits_{x \to a^>} f(x)[$

$f(]a; +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to a^>} f(x)[$

$f(]-\infty; a]) = f(a); \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

EXEMPLE. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$; $I =]-\infty; 3]$; $J =]3; +\infty[$

Calculer $f(I)$ et $f(J)$

Réponse : on a : $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x^1 - 3$

$= x - 3$

$f'(x) = 0 \iff x = 3$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x) = x-3$		−	0	+	
f	$+\infty$	↘	$-\frac{7}{2}$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f(3) = \frac{1}{2} 3^2 - 3 \times 3 + 1 = \frac{9}{2} - 9 + 1 = -\frac{7}{2}$

d'après le tableau on a :

f est strictement ↘ sur I

donc : $f(I) = f(]-\infty; 3])$

$= [f(3); \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[$

$= [-\frac{7}{2}; +\infty[$

f est strictement ↗ sur J donc :

$f(J) = f(]3; +\infty[) =]\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) ; \lim\limits_{+\infty} f[$

$=]-\frac{7}{2}; +\infty[$

IV - Théorème des valeurs intermédiaires مبرهنة القيم الوسيطية

Thm 1 : [cas générale]

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
pour tout $k \in f(I)$ l'équation $f(x) = k$ admet une solution dans I.

EXEMPLE : Soit f une fonction continue définie par le tableau de variatiation :

x	$-\infty$	-4	1	9	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	7 ↘	-10 ↗	-2 ↘	$-\infty$

1) ..... $f(]-\infty;-4])$; $f([-4;1])$ et $f([9;+\infty[)$

2) Montrer que l'équation :

a) $f(x) = 0$ admet une solution dans $]-\infty;-4]$

b) $f(x) = -3$ admet une solution dans $[1;9]$

Réponse :

1) d'après le tableau on a :

$f(]-\infty;-4]) =]-\infty;7]$; $f([-4;1]) = [-10;7]$

$f([9;+\infty[) =]-\infty;-2]$

2) **2-a** $\begin{cases} f \text{ continue sur }]-\infty;-4] \\ 0 \in f(]-\infty;-4]) =]-\infty;7] \end{cases}$

d'après le Thm des valeurs intermédiaires, l'éq $f(x) = 0$ admet une solution dans $]-\infty;-4]$.

2-b $\begin{cases} f \text{ continue sur } [1;9] \\ -3 \in f([1;9]) = [-10;-2] \end{cases}$

donc d'après T.V.I, l'éq $f(x) = -3$ admet une solution dans $[1;9]$.

Thm 2 : si $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a;b] \\ f \text{ strictement monotone sur } [a;b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases}$

alors : l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $]a;b[$.

EXEMPLE : Montrer que l'équation $(E) : 4x^5 + x^3 + 2 = 0$ admet une seule solution dans $]-1;0[$

Réponse : posons : $f(x) = 4x^5 + x^3 + 2$

- f est continue sur $[-1;0]$ (car polynome)
- $f'(x) = 20x^4 + 3x^2 \geq 0$ donc f est strictement ↗ sur $[-1;0]$.
- $\begin{cases} f(0) = 4 \times 0 + 0 + 2 = 2 > 0 \\ f(-1) = -4 - 1 + 2 = -3 < 0 \end{cases}$ donc : $f(0) \times f(-1) < 0$

donc d'après T.V.I l'éq : (E) admet une seule solution dans $]-1;0[$.

V. Fonction réciproque الدالة العكسية

Déf : Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I admet une fonction réciproque noté f^{-1} définie sur $J = f(I)$ et à valeur dans I :

$$I \xrightarrow{f} J = f(I) \xrightarrow{f^{-1}} I$$

et on a : $(\forall x \in J)\ (\forall y \in I) \quad f^{-1}(x) = y \iff x = f(y)$.

EXEMPLE : $f(x) = 3x^2 - 5$; $I = [1;4]$

1/ Mq f admet une fct réciproque définie sur J.

2/ Déterminer J et calculer $f^{-1}(-2)$; $f^{-1}(43)$.

on a : $\forall x \in I = [1;4]$; $f'(x) = 2 \times 3x = 6x > 0$

donc f est strictement ↗ sur I et continue

donc f admet une fonction réciproque définie sur $J = f(I)$.

2°/ on a f est ↗ sur I donc ;

$J = f(I) = f([1;4]) = [f(1); f(4)] = [-2; 43]$

Calcul de $f^{-1}(-2)$ et $f^{-1}(43)$

on a : $f(1) = -2 \Leftrightarrow 1 = f^{-1}(-2)$

$f(4) = 43 \Leftrightarrow 4 = f^{-1}(43)$

(car dans la définition on a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$)

Proposition :

• f^{-1} est continue sur $J = f(I)$

•• si f est strictement ↗ sur I alors f^{-1} est strictement ↗ sur $J = f(I)$.

••• (f est str ↘ sur I) ⟹ (f^{-1} est str ↘ sur $f(I)$)

Dans un repère orthonormé ; $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ sont symétrique par rapport à la droite : $(\Delta) : y = x$.

$(\mathcal{C}_f)$

$y = x$

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$

(Δ) 1er bissectrice